Tentamen Variatierekening en Optimale Besturingstheorie

Datum : 01-02-2011
Plaats :
Tijd : 14.00-17.00

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw het variatierekeningprobleem bestaande uit het minimaliseren van

$$\int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))dt + S(x(T))$$

over alle functies $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ met $x(0) = x_0$ (vast). Zij de functie $F(t, x(t), \dot{x}(t))$ van de vorm

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}G(t, x(t))$$

voor één of andere functie $G(t, x(t))$.

   (a) Leid de Eulervergelijking voor dit variatierekeningprobleem af.

   (b) Laat zien dat *elke* functie $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ aan de Eulervergelijking voldoet. Wat is de verklaring voor dit merkwaardige fenomeen ?

   (c) Los het variatierekeningprobleem op.

2. Beschouw het scalaire systeem $\dot{x} = u, x(0) = x_0$.

   (a) Bepaal de optimale terugkoppeling $u = -fx$ (f te bepalen) en de minimale kosten (afhankelijk van x_1) voor het minimaliseren van

$$\int_1^\infty (u^2(t) + 4x^2(t))dt$$

   bij gegeven beginconditie $x(1) = x_1$.

   (b) Bepaal door middel van het Maximum principe de optimale ingangsfunctie $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ voor de minimalisatie van

$$\int_0^1 \frac{1}{4}u^4(t)dt + kx^2(1)$$

   voor gegeven constante k.

   (c) Minimaliseer rechtstreeks op basis van onderdelen (a) en (b) de integraal

$$\int_0^1 \frac{1}{4}u^4(t)dt + \int_1^\infty (u^2(t) + 4x^2(t))dt$$

3. Veel fysische systemen zijn van de vorm

$$\dot{x}(t) = JHx(t), x \in \mathbb{R}^n, \qquad x(0) = x_0, \text{ met } J = -J^T, H = H^T > 0$$

(a) Bewijs dat $x = 0$ altijd een stabiel evenwichtspunt is. (Hint: Beschouw de Lyapunovfunctie $V(x) = \frac{1}{2}x^T Hx$.)

(b) Bewijs dat $x = 0$ evenwel niet asymptotisch stabiel kan zijn.

(c) Gezien het antwoord van (b) is het logisch om het systeem asymptotisch stabiel te maken. Hiertoe beschouwen we voor een vector $b \in \mathbb{R}^n$ het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= JHx(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0, \quad u \in \mathbb{R} \\ y(t) &= b^T Hx(t), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bewijs dat als $(b^T H, JH)$ waarneembaar is, dan maakt de uitgangsterugkoppeling $u(t) = -y(t)$ het systeem globaal asymptotisch stabiel.

(d) Bewijs dat de bovenstaande terugkoppeling ook de optimale terugkoppeling is voor het optimale besturingsprobleem

$$J(u(\cdot)) = \int_0^\infty [y^2(t) + u^2(t)]dt, \quad x(0) = x_0,$$

door aan te tonen dat H de positieve oplossing is van de bijbehorende algebraische Riccativergelijking. Wat zegt dit over de minimale kosten ?

4. Beschouw het niet-lineaire systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= -y + u \end{aligned}$$

(a) Bepaal het gelineariseerde systeem rond $x = y = 0$ en $u = 0$. Laat zien dat dit systeem niet stabiliseerbaar is.

(b) Beschouw de niet-lineaire terugkoppeling

$u = -x^2$

Laat door middel van een geschikt gekozen Lyapunovfunctie zien dat $x = y = 0$ een asymptotisch stabiel evenwichtspunt van het gesloten-lus ('closed-loop') systeem is. Wat zijn de eigenwaarden van het gelineariseerde gesloten-lus systeem ?

Puntenverdeling: Gratis 10

1. a: 5, b: 10, c: 5.

2. a: 8, b: 8, c: 9.

3. a: 6, b: 6, c: 6, d: 7.

4. a: 8, b: 12.